FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Departman za proizvodno mašinstvo

OPTIMIZACIJA I LOGISTIKA PROIZVODNJE

Tema:

TEHNOEKONOMSKA OPTIMIZACIJA

ANALITIČKE METODE OPTIMIZACIJE

Pof. dr Dejan Lukić

Pojam tehnoekonomske optimizacije

U osnovi pojma i opšteg značenja **optimizacije** sadržana je **metodologija** pomoću koje se određuje neki **najpovoljniji rezultat ili rešenje** za određene **uslove**. Posebni deo teorije optimizacije, primenjene u proizvodnom mašinstvu i tehnici uopšte, čini **tehnoekonomska optimizacija**.

Pojam tehnoekonomska optimizacija baziran je na činjenici da je iznalaženje **najpovoljnijih rešenja** zasnovano na **grupi tehničkih i ekonomskih kriterijuma**.

Među osnovne pojmove tehnoekonomske optimizacije spadaju:

- ciljevi,
- objekti,
- metode i
- uslovi

pri kojima se optimizira dati objekat

Cilj optimizacije se iskazuje preko **kriterijuma optimizacije**, odnosno **funkcije optimizacije** ili **funkcije cilja**, a **metodom optimizacije** se ostvaruje postavljeni cilj optimizacije na posmatranom objektu.

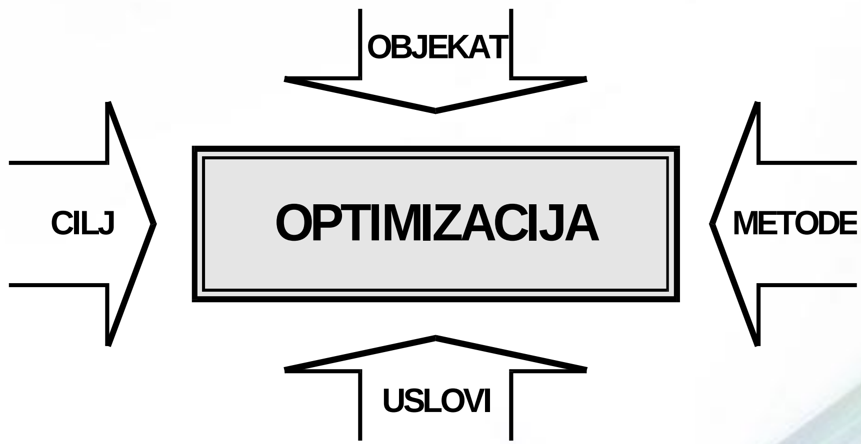
Objekata optimizacije ima mnogo, i po broju i po raznovrsnosti. Tako u mašinskoj tehnici kao objekat optimizacije može biti: neki od **procesa** kao što su *obradni, tehnološki, proizvodni, termodinamički, strujni* i sl., neki **tehnički sistem** kao što je *mašina, uređaj, saobraćajno sredstvo, instalacija, postrojenje*, **proizvod**, **inženjerska i uopšte ljudska delatnost** u nekom vremenskom domenu kao na primer *projektovanje, konstruisanje, istraživanje, upravljanje, organizovanje* itd.

Pojam tehnoekonomske optimizacije

Objekti optimizacije (na čemu se vrši optimizacija/šta se optimizira):
- Procesi (obradni, tehnološki, hidraulički, termodinamički, ...)
- Tehnički sistem (mašina, proizvod, uređaj, postrojenje, ...)
- Inženjer. delatnost (projektovanje, konstruisanje, upravljanje, organizovanje,..)

Cilj optimizacije=
Funkcija cilja
- vreme (proizvodnost)
- troškovi (ekonomičnost)
- stepen iskorišćenja
- kvalitet
- dobit
- profit
- ....

MAX
MIN



Metode optimizacije:
- Analitičke
- Eksperimentalne

Uslovi optimizacije mogu biti:
- Stohastički (sa uticajem spoljašnje sredine)
- Deterministički (bez uticaja spoljašnje sredine)

Značaj optimizacije u inženjerskom projektovanju

Veliki i raznovrsni broj objekata optimizacije u tehnici određuje širinu i značaj optimizacije. Skoro da nema tehničke nauke, niti inženjerske delatnosti, gde se ne koriste, u punoj meri, principi i metode optimizacije:

- *Projektovanje sistema, njihovih struktura i komponenata,*
- *Analiza i unapređenje funkcionisanja postojećih sistema,*
- *Optimalno upravljanje proizvodnim tehnikama i tehnologijama,*
- *Inženjerske analize i obrada informacija i*
- *Upravljanje dinamičkim sistemima.*

Prva oblast je vrlo široka, jer korišćenje optimizacije u ovoj oblasti počinje od **projektovanja i konstruisanja strukturnih elemenata i jedinica sistema**, a završava se **konstruisanjem i razradom projekata proizvoda i fabrike** u celini.

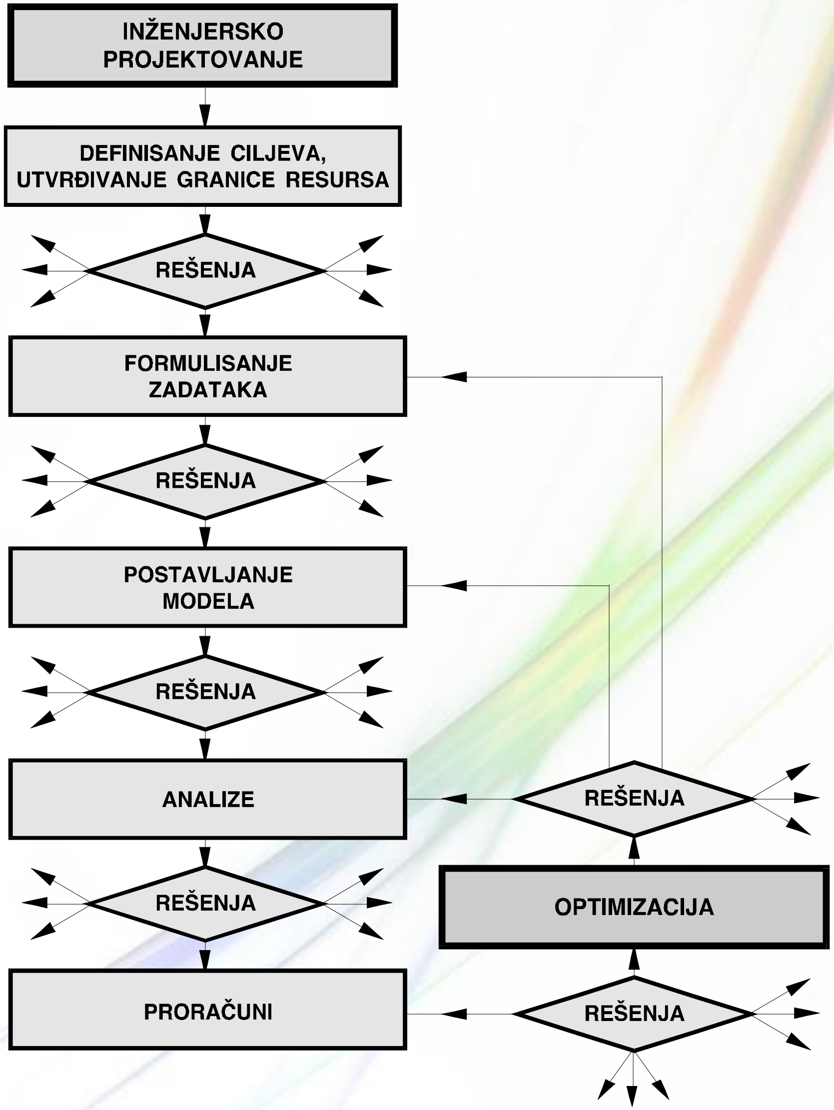
Druga oblast se odnosi na postojeće sisteme, gde se prvo vrši **analiza rada sistema** kroz **dekompoziciju na sastavne elemente** (podsisteme, aktivnosti itd.), a potom se primenom metoda optimizacije **unapređuje funkcionisanje** sastavnih elemenata, kao i sistema u celini.

Treća oblast je vrlo značajna za proizvodno mašinstvo, jer se u okviru nje vrši optimizacija i optimalno upravljanje proizvodnjom-tehnoekonomska optimizacija obradnih, tehnoloških I proizvodnih procesa.

Značaj optimizacije u inženjerskom projektovanju

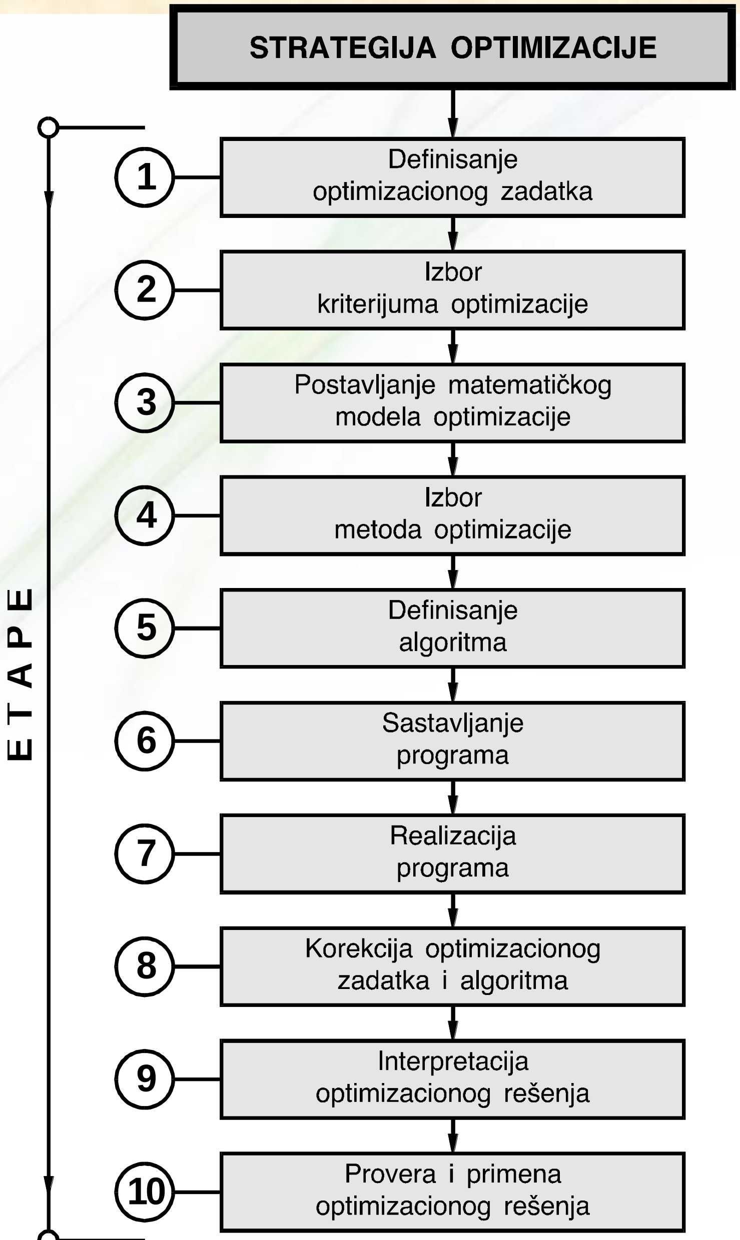
Pri projektovanju **novih**, a takođe i pri **analizi funkcionisanja postojećih sistema**, optimizacija predstavlja jednu od ključnih etapa u procesu formiranja **optimalnog projekta** novog sistema ili **definisanja optimalnih rešenja** i uslova funkcionisanja datog sistema. Ovaj proces čine četiri osnovne etape:

- *Projektovanje strukture sistema,*
- *Postavljanje modela sistema,*
- *Optimizacija parametara modela sistema i*
- *Analiza dobijenih rešenja.*



Etape inženjerskog projektovanja

Osnovne etape optimizacije



Etape optimizacije

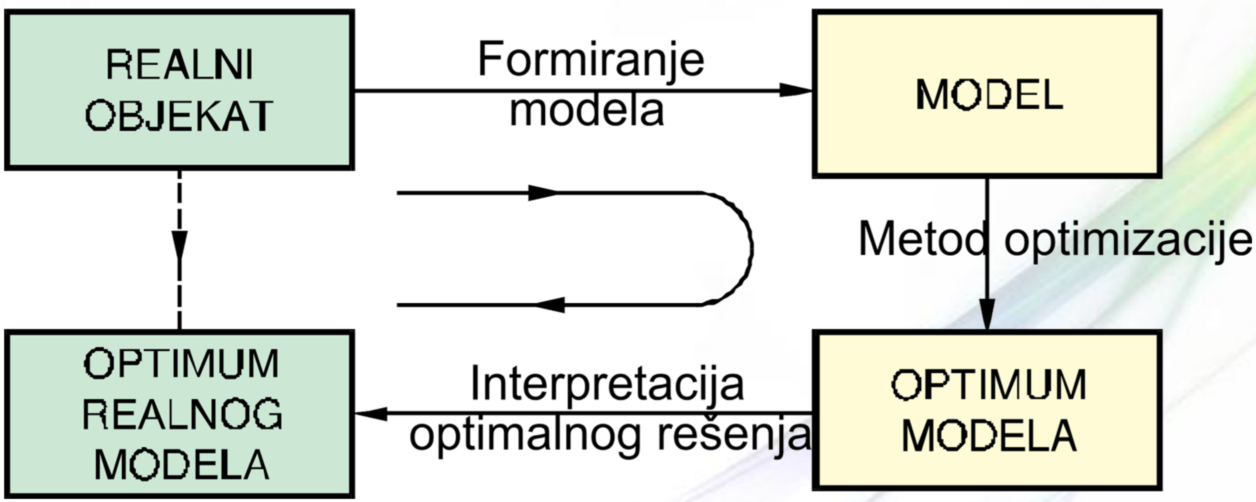
Metodologija optimizacije se sastoji od 10 etapa, koje se mogu prikazati kroz 6 faza:

- Definisanje optimizacionog zadatka - formulacija problema (šta je objekat optimizacije – npr. mašina, proizvod)
- Izbor kriterijuma optimizacije-funkcije cilja (npr. najmanji troškovi izrade)
- Postavka matematičkog modela koji reprezentuje realni sistem (postavka funkcija stanja, funkcija ograničenja i funkcije/a cilja)
- Izbor i primena metode optimizacije, izbor algoritma i programa za računar (eventualno modifikacija ili razvoj nove metode, razrada algoritma ili izrada programa za računar),
- Testiranje modela i interpretacija dobijenih rešenja i
- Implementacija dobijenog optimalnog rešenja na postavljeni objekat optimizacije.

Osnovne etape optimizacije

Proces optimizacije, koji se temelji na korišćenju **matematičkog modela objekta**, odnosno **matematičkog modela optimizacije** nekog objekta, može se posmatrati kao metod pronalaženja optimalnog rešenja za dati realni objekat vrlo često **bez neposrednog eksperimentisanja**, odnosno eksperimentalnog ispitivanja na tom objektu.

Pri tome, i **matematički model objekta** i **matematički model optimizacije objekta**, moraju biti dovoljno **pouzdani**, tj. **adekvatni**. To znači da oni, iako se svakim modelom iskazuje približna predstava nekog objekta, jer se manje važne ili nevažne karakteristike objekta ispuštaju iz modela, **moraju da odraze najvažnije karakteristike datog realnog objekta**.



Optimizacija realnog objekta preko modela

Formiranje matematičkog modela datog objekta predstavlja skoro redovno najtežu etapu procesa optimizacija.

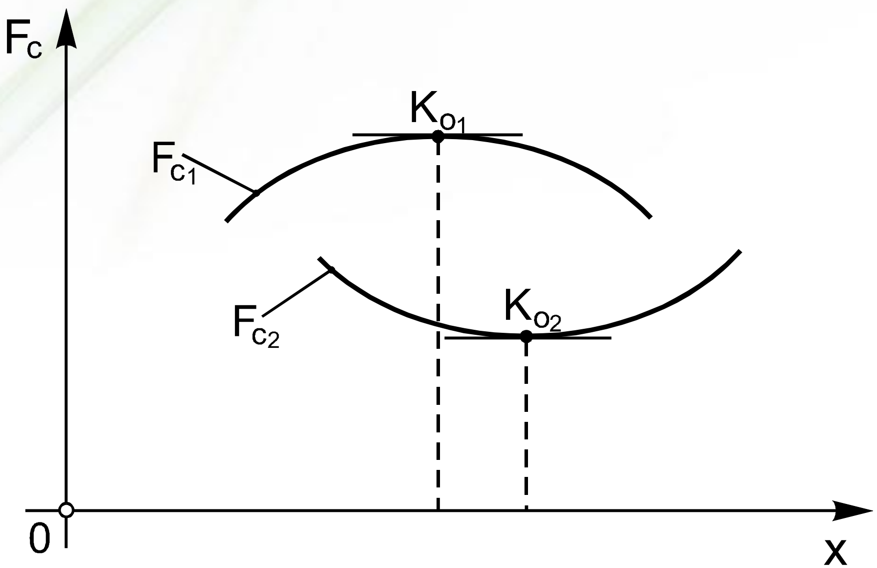
Oblici optimizacionih zadataka kod kojih funkcija optimizacije ima lokalni ekstrem

Karakteristični oblici optimizacionih zadataka

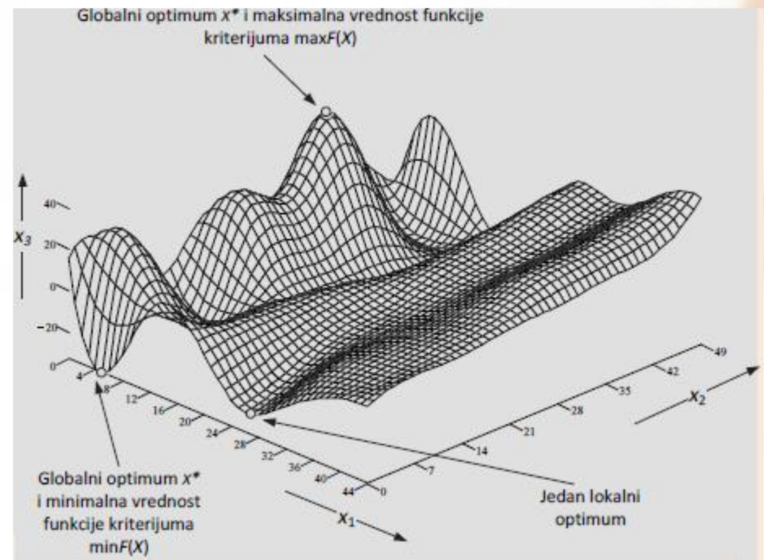
Osnovni cilj svakog optimizacionog zadatka, kako je već istaknuto, podrazumeva **određivanje uslova** pri kojima funkcija optimizacije **F_c** ima **minimalnu** ili **maksimalnu** vrednost, poznatu kao **optimalno rešenje**.

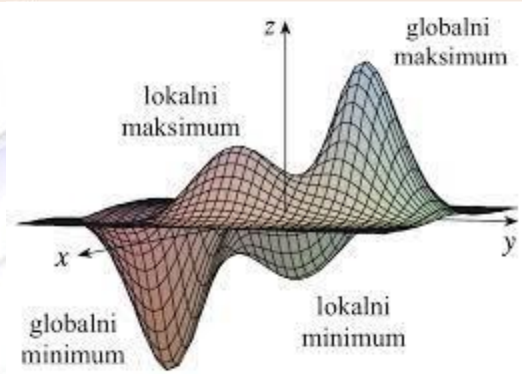
Pri tome se mogu pojaviti dva osnovna oblika optimizacionog zadatka:

1. **Prvi** se odnosi na slučajeve kada funkcija optimizacije F_c ima **globalni** i/ili **lokalni ekstrem.**



Oblici optimizacionih zadataka kod kojih funkcija optimizacije ima globalni ekstrem

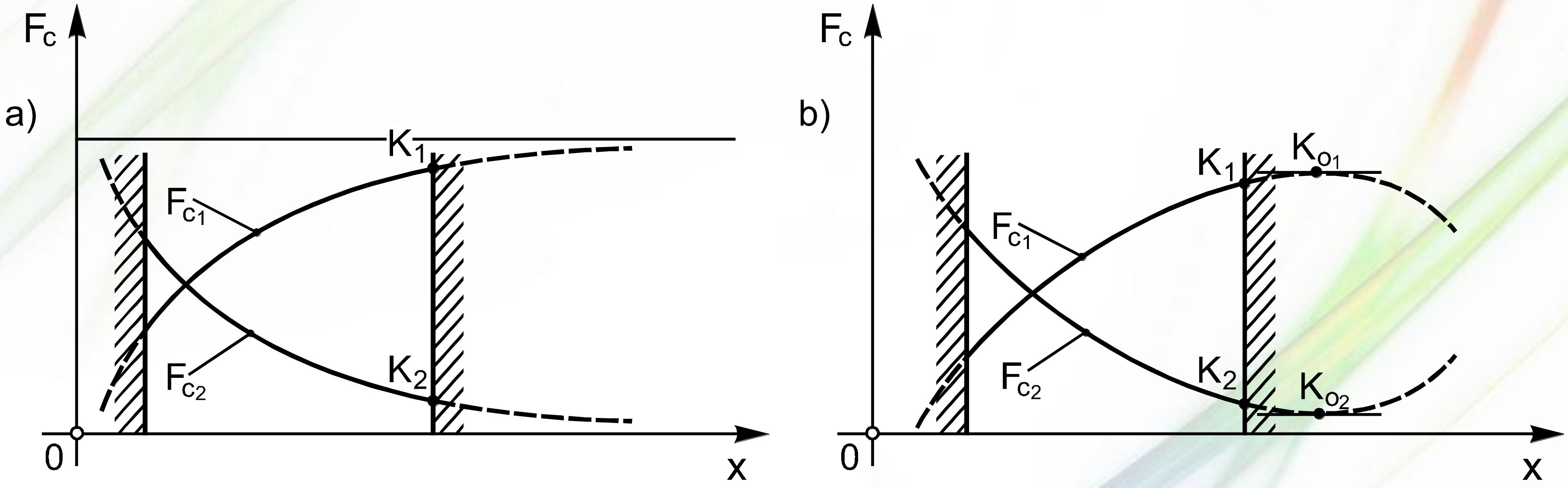




Karakteristični oblici optimizacionih zadataka

Drugi kada je optimalno rešenje **unutar ili izvan oblasti dopuštenih rešenja**

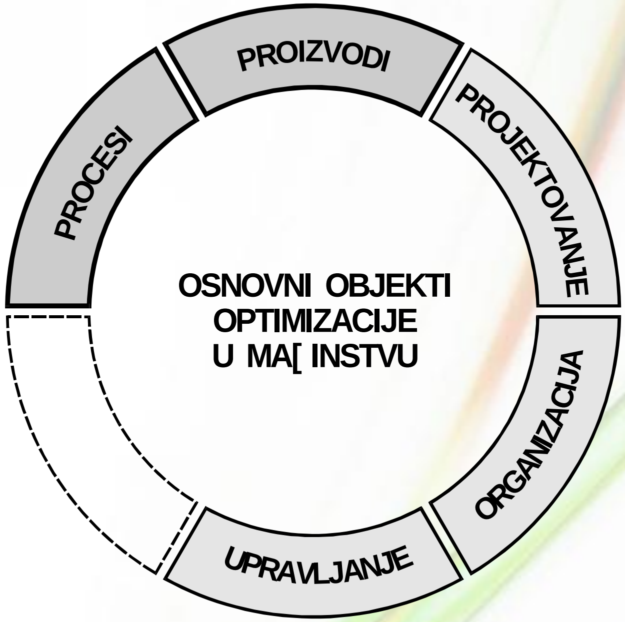
Bez obzira da li se ekstremna vrednost funkcije optimizacije nalazi u beskonačnosti, ili u realnoj blizini **izvan** oblasti dopuštenih rešenja, optimalnim rešenjem proglašavaju se vrednosti funkcija F_c u tačkama K_1 odnosno K_2.



Oblici optimizacionih zadataka kod kojih je optimalno rešenje izvan oblasti dopuštenih rešenja

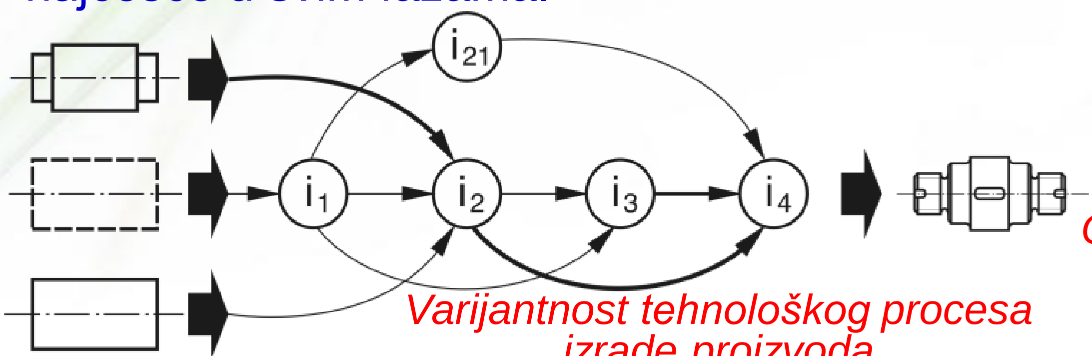
Osnovni objekti optimizacije u mašinstvu

U osnovne objekte optimizacije u mašinstvu spadaju **tehnološki procesi** izrade proizvoda, **proizvodi**, odnosno konstrukcije proizvoda i njihovih elementa, **sistemi projektovanja** proizvoda i tehnoloških procesa njihove izrade i montaže i **organizacija**, odnosno **upravljanje** proizvodnjom.



Osnovni objekti optimizacije u mašinstvu

Tehnološki procesi izrade proizvoda, kao objekti optimizacije, karakterišu se varijantnošću rešenja najčešće u svim fazama.



Varijantnost tehnološkog procesa izrade proizvoda

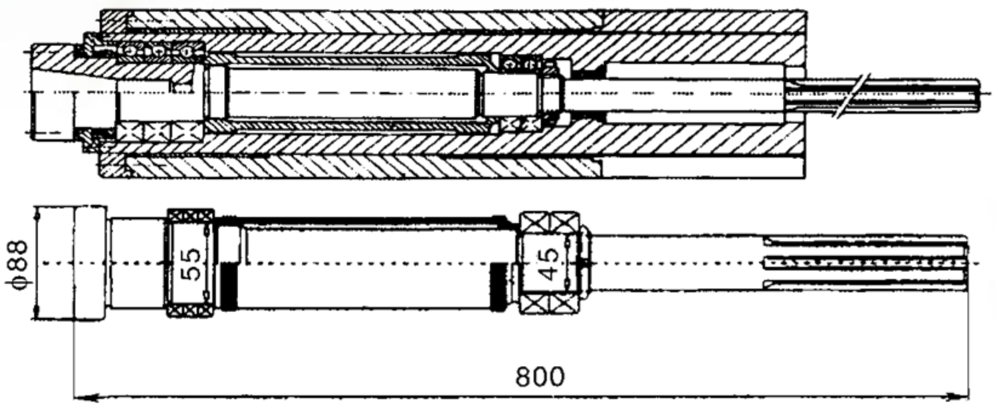
Za izradu određenog proizvoda moguće je, u opštem slučaju, izabrati različite vrste pripremaka, kao i različita rešenja redosleda, vrsta i sadržaja operacija, koje predstavljaju **čvorove tehnološkog grafa**.

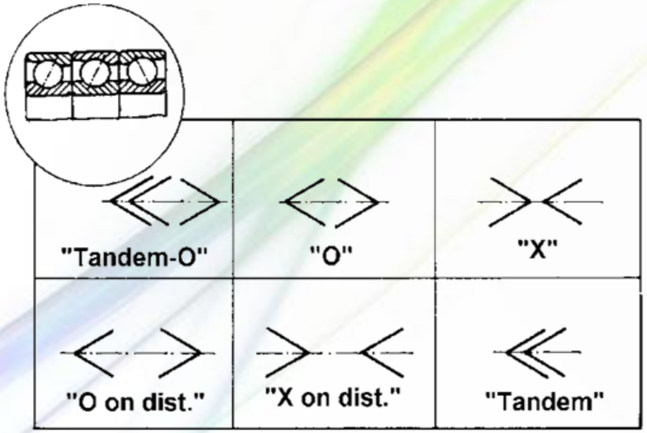
Optimizacioni zadatak za ovakve objekte optimizacije svodi se na određivanje one varijante tehnološkog procesa izrade koja obezbeđuje zahtevani **tehnički kvalitet** prema dokumentaciji i optimalne vrednosti i drugih funkcija optimizacije kao što su **proizvodnost, ekonomičnost, profit i dobit**.

Osnovni objekti optimizacije u mašinstvu

Optimizacija konstrukcionih rešenja proizvoda, kao objekata optimizacije podrazumeva rešavanje kompleksnog zadatka sadržanog u kvantitativnoj i kvalitativnoj tehnologičnosti.

Ako se, na primer, kod sklopa glavnog vretana postavi kao glavni eksploatacijski zahtev najpovoljnija slika dinamičkog ponašanja, onda se to postiže odgovarajućim **konstrukcionim oblicima vretena**, odnosno **rasporedom masa** i izborom **najpovoljnijeg načina uležištenja**. Pri postizanju ovako postavljenog cilja može se pojaviti neophodnost određenih kompromisa u pogledu drugih zahteva konstrukcionih rešenja koja su sadržana u kvantitativnoj i kvalitativnoj tehnologičnosti.

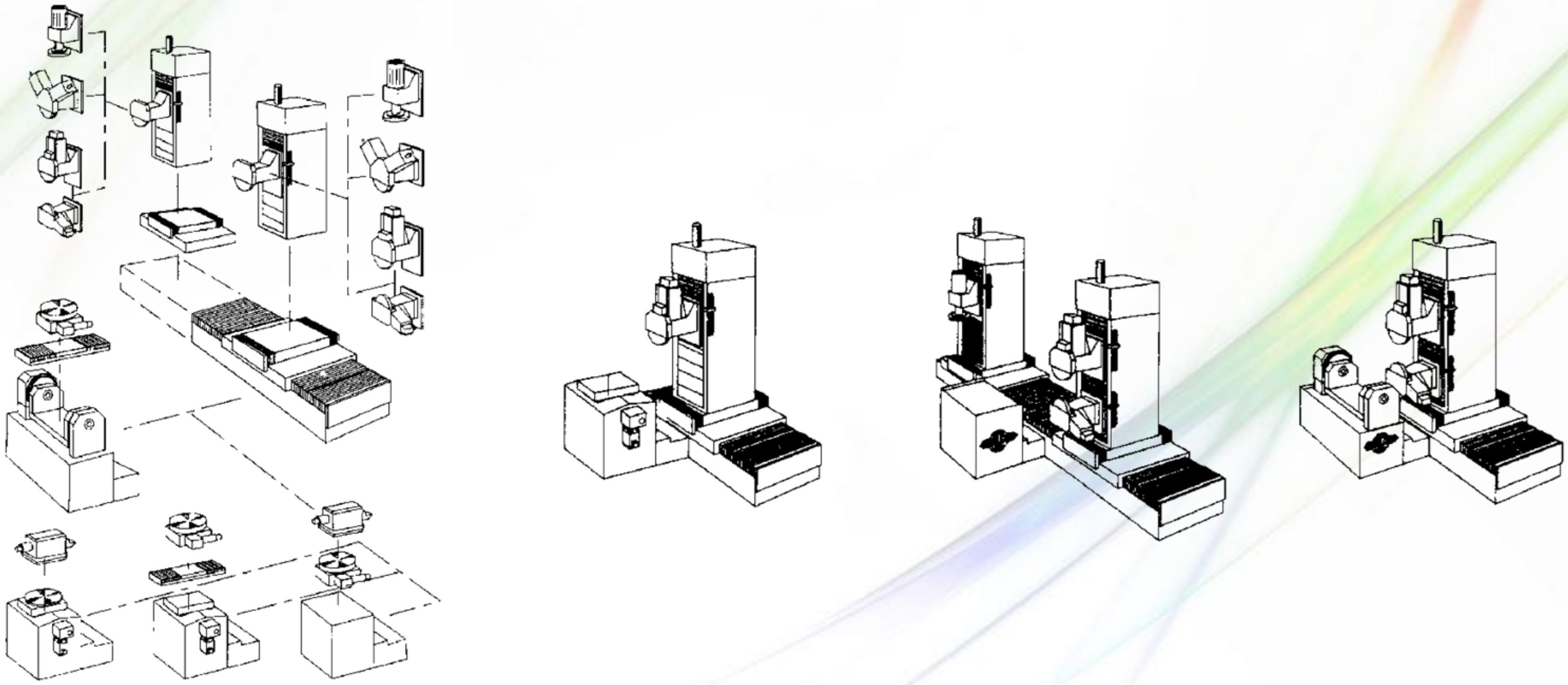




Sklop glavnog vretena kao objekat optimizacije

Osnovni objekti optimizacije u mašinstvu

U sistemima projektovanja proizvoda danas su u primeni savremeni prilazi zasnovani na korišćenju računara, koji obezbeđuju najveće efekte procesa projektovanja. Tako, na primer, sistem projektovanja proizvoda koji je zasnovan na **modularnom konceptu**, osim visokih efekata u procesu proizvodnje, **fleksibilnosti** prema zahtevima tržišta i drugih efekata obezbeđuje najveći doprinos ukupnom optimalnom sistemu projektovanja proizvoda, posebno uz primenu računara.

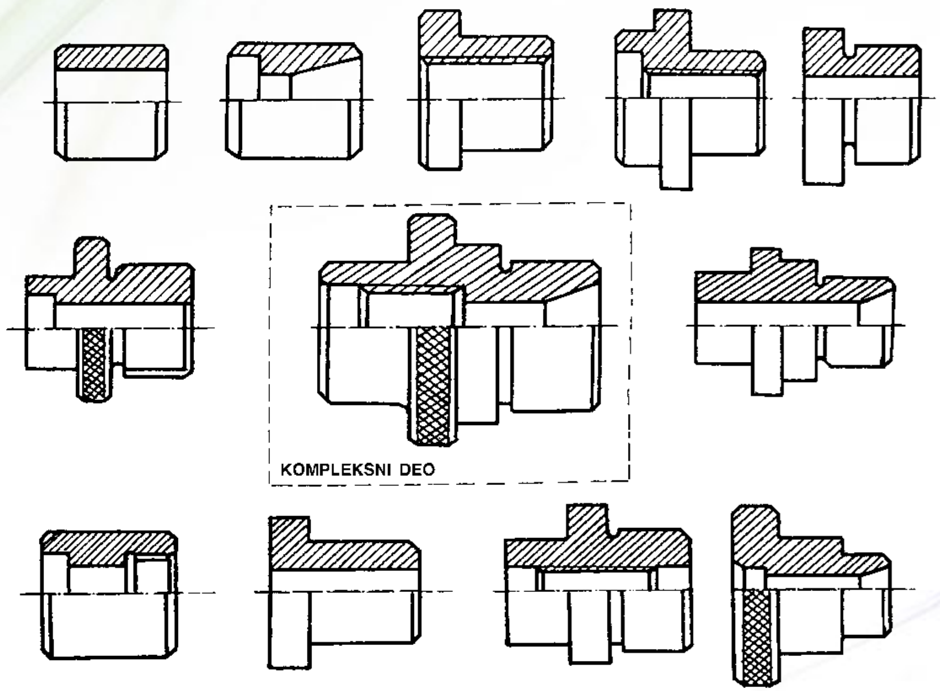


Primer ELB koncepta modularnog projektovanja brusilica

Osnovni objekti optimizacije u mašinstvu

U sistemima projektovanja tehnoloških procesa izrade proizvoda danas su takođe, prisutni savremeni načini projektovanja zasnovani na primeni računara i odgovarajućih programskih sistema.

Ako je na primer, sistem projektovanja tehnoloških procesa obrade zasnovan na konceptu **grupne ili tipske tehnologije**, onda se umesto projektovanja tehnoloških procesa izrade za sve delove može projektovati samo jedan **standardni (grupni/tipski) tehnološki** proces za **kompleksni deo**, čijim se tehnološkim procesom obezbeđuju tehnološki procesi izrade svih delova iz posmatrane grupe. Time se, naravno, proces projektovanja značajno racionalizuje.



Primer racionalizacije projektovanja tehnoloških procesa obrade na principima grupne tehnologije

Primenom koncepta grupne tehnologije značajno se racionalizuju ***sistemi projektovanja proizvoda i sistemi organizacije procesa proizvodnja***.

Osnovni modeli objekata optimizacije

Modeliranje predstavlja jedan od metoda naučnog istraživanja mnogih objekata u tehnici i nauci. U osnovi modeliranja sadržan je **pojam modela**, pa se stoga **modeliranje** definiše kao **proces formiranja modela datog objekta**. Navode se ovih pet najčešćih **ciljeva modeliranja**:

- ***Analiza i potpunije proučavanje*** *objekata kako bi se dobila, pomoću modela, dovoljno pouzdana znanja i nove zakonitosti o proučavanom objektu,*
- ***Provera postavljenih hipoteza*** *o zakonitostima i mehanizmima unutrašnjih interdejstava u datom objektu,*
- ***Programiranje*** *ili* ***predviđanje stanja*** *i ponašanja objekta,*
- ***Optimizacija*** *raznovrsnih objekata u proizvodnom mašinstvu i tehnici uopšte*
- ***Upravljanje*** *datim objektom u prostoru i vremenu.*

Model nekog objekta može se definisati, u opštem slučaju, kao izvesni **skup organizovanih informacija** koje daju određenu **predstavu** o tom objektu. Objekat se u ovom slučaju zove **realni objekat** ili **objekat modeliranja**. Modeli se najčešće dele na misaone, fizičke i matematičke.

Pod ***misaonim modelom*** podrazumeva se određena predstava o realnom objektu u **čovekovoj svesti**, nastala u gnoseološkom, odnosno spoznajnom procesu. Ova spoznaja treba da sadrži suštinske informacije o realnom objektu.

Osnovni modeli objekata optimizacije

Fizičkim ili materijalnim modelom zove se onaj specijalno izrađeni objekat, sličan ili srazmeran realnom objektu, ali obično manjih dimenzija, radi proučavanja i upravljanja realnim objektom. Na ovom modelu se relativno lako i sa znatno manjim troškovima organizuju i izvode eksperimentalna istraživanja i merenja u odnosu na realni objekat. Pri tome su **procesi u fizičkom modelu identični po svojoj fizičkoj prirodi onim u realnom objektu**.

Pored značajnih osobina i prednosti fizičkog modela u spoznaji nekog realnog objekta, ne smeju se izgubiti iz vida i određene **njegove mane.** Najznačajnija je ona koja se odnosi i na mogućnost pojave takvih osobina u fizičkom modelu kojih nema u realnom objektu. Ova pojava je posledica, pored ostalog, razlike u geometrijskim merama između fizičkog modela i realnog objekta.

Matematički model, za razliku od fizičkog koji zadržava fizičku prirodu realnog objekta, prikazuje se **matematičkom apstrakcijom.** Pa ipak, ovaj apstraktni oblik iskazuje suštinske **fizičke, geometrijske, tehnološke, ekonomske** ili bilo koje druge karakteristike realnog objekta.

Metode **matematičkog modeliranja** se dele na:

- *Analitičke metode,*
- *Eksperimentalne metode i*
- *Kombinovane metode.*

Analitičke metode - postoji matematički model optimizacije, poznati su mehanizmi i zakonitosti unutar objekta optimizacije.

Eksperimentalne metode – nije poznat matematički model, optimum se određuje direktnim eksperimentalnim istraživanjem.

Metode tehnoekonomske optimizacije

Raznovrsno mnoštvo metoda optimizacije objekata može se razvrstati, u pojedine grupe, na osnovu određenih kriterijuma. Metode optimizacije koje su predmet izučavanja, svrstane su u grupe **analitičkih** i **eksperimentalnih metoda.**

Analitičke metode optimizacije

Glavno obeležje analitičkih metoda sastoji se u tome da je **matematički model optimizacije datog objekta poznat** ili da se može postaviti budući da su **zakonitosti i pojave** unutar objekta **potpuno poznate**.

Gradijentna metoda

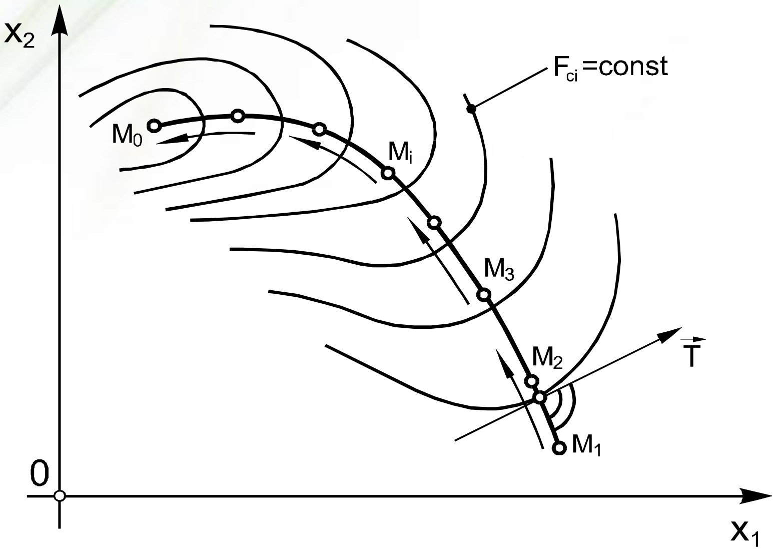
U grupu najčešće korišćenih metoda u optimizaciji raznovrsnih objekata, kao što su procesi i sistemi, spada gradijentna metoda. Razlog za to su njene osnovne osobine:

- ***Univerzalnost**, tj. mogućnost metode da se pomoću nje optimiziraju i linearne i nelinearne funkcije optimizacije, bez ograničenja i sa ograničenjima, sa linearnim i nelinearnim ograničenjima, dakle, da se reše optimizacioni zadaci sa najopštijim modelom optimizacije.*
- ***Efikasnost** i relativna **jednostavnost procedure** rešavanja i najsloženijih optimizacionih zadataka.*
- ***Razvijeni algoritmi**, odnosno procedure metode orijentisani su na upotrebi računara.*

Gradijentna metoda

U osnovi gradijentne metode sadržan je **princip pretraživanja i približavanja** pa se ova metoda može, u metodološkom smislu, označiti kao **metoda pretraživanja**. Ona inače pripada, kako je ranije naglašeno, grupi numeričkih metoda optimizacije.

Suština metode i njene procedure sastoji se u iterativnom približavanju **optimumu M_o** po **gradijentnoj trajektoriji**. Ova trajektorija je, kao što je poznato, upravna na **ekvidistantne linije** nivoa u konturnom dijagramu funkcije **F_c**. U njenim tačkama se postiže najveća promena vrednosti (najveći porast odnosno pad ili najbrži rast odnosno opadanje) funkcije optimizacije F_c.



Postepeno približavanje optimumu M_0 funkcije optimizacije F_c pomoću gradijentne metode

Sadržaj pojedinih sukcesivnih koraka u algoritmu gradijentne metode optimizacije obuhvata:

1. ***Izbor početne tačke*** $M_p=M_1(x_1)$, čije su koordinate

$$\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31}, ..., x_{k1})$$

Ukoliko su uz funkciju optimizacije ***F_c*** data određena ograničenja, tada je potrebno da se izvrši provera da li koordinate tačke M_1 **zadovoljavaju sistem datih ograničenja**.

2.Izračunavanje vrednosti F_c u tački M_1, tj.

$$F_{c1} = F_{c1}(x_{11}, x_{21}, x_{31}, ..., x_{k1})$$

Gradijentna metoda

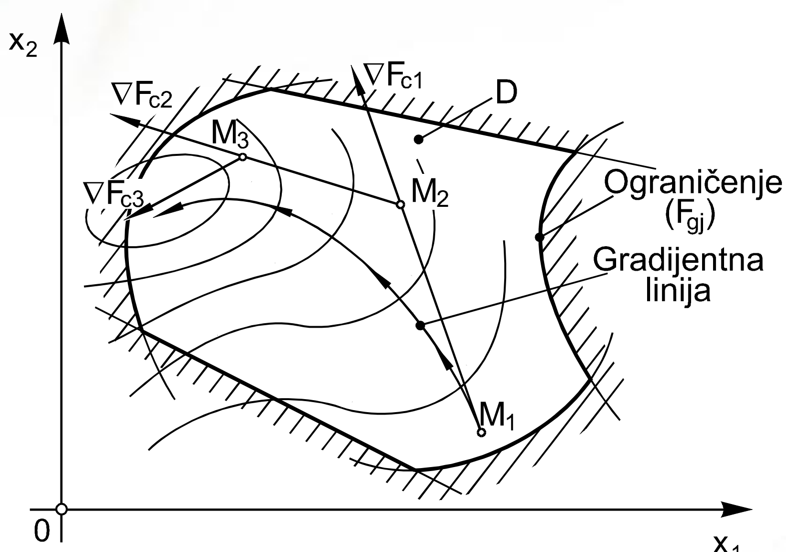
3.Određivanje gradijenta $gradF_c = \nabla F_c = (\frac{\partial F_c}{\partial x_1}, \frac{\partial F_c}{\partial x_2}, \frac{\partial F_c}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial F_c}{\partial x_k})$

funkcije optimizacije F_c u tački M_1 $gradF_{c1} = \nabla F_{c1} = (\frac{\partial F_{c1}}{\partial x_1}, \frac{\partial F_{c1}}{\partial x_2}, \frac{\partial F_{c1}}{\partial x_3}, ..., \frac{\partial F_{c1}}{\partial x_k})$

4.Određivanje veličine koraka $\overrightarrow{\Delta x_1} = \lambda_1 gradF_{c1}$

po gradijentnoj liniji od tačke $M_1=M_p$ do M_2. Veličina koraka zavisi od veličine promene, odnosno oblika površine F_c u okolini početne tačke M_1. Pri suviše velikom koraku može se znatno odstupiti od gradijentne linije, pa čak i **prekoračiti optimum objekta**, ali ako je korak izuzetno mali biće duža i sporija iterativna procedura približavanja optimumu.

5. Pošto je izabran korak, određuju se zatim koordinate nove tačke $M_2(x_2)$



Jedna praktična gradijentna procedura iterativnog približavanja optimumu objekta

$$\vec{x}_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32}, ..., x_{k2}) = \vec{x}_1 + \lambda_1 gradF_{c1}$$

6. Proverava se da li koordinate tačke M_2 zadovoljavaju sistem datih ograničenja.

7.Izračunava se vrednost funkcije optimizacije F_{c2} u tački M_2, tj.

$$F_{c2} = F_{c2}(x_{12}, x_{22}, x_{32}, ..., x_{k2})$$

8.Upoređivanje vrednosti F_{c1} i F_{c2} funkcije optimizacije u tačkama M_1 i M_2.

9.Ponavlja se opisana procedura za tačku M_1 u tački M_2.

Gradijentna metoda

10. Procedure tačaka M_1 i M_2 ponavljaju se i u svim narednim tačkama $M_{3,4,...}$ gradijentne linije sve dotle dok se ne dostigne traženi **optimum F_{co} date funkcije optimizacije F_c.**

Smatra se da je iterativna procedura gradijentnog metoda okončana, tj., neka tačka iz dopuštenog domena biće optimalna: ako modul gradijenta grad $F_c(x)$ u ovoj, optimalnoj tački **ima malu vrednost** što znači da su komponente vektora $gradF_c(x)$ **vrlo bliske ili skoro jednake nuli**, dakle,

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_i} \approx 0, \qquad i = \overline{1,k},$$

ili ako se ova tačka nalazi **na granici dopuštene oblasti** (u ovoj tački ne moraju tada biti komponente gradijenta gradF_c bliske nuli).

Kao što se iz izložene procedure vidi, **izbor početne tačke, izbor pravca kretanja** i **izbor koraka na pravcu kretanja** ka optimumu predstavlja tri ključna elementa gradijentnog metoda optimizacije.

Primer: Primena gradijentne metode

Odrediti minimum funkcije cilja:

$$F_c = X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18$$

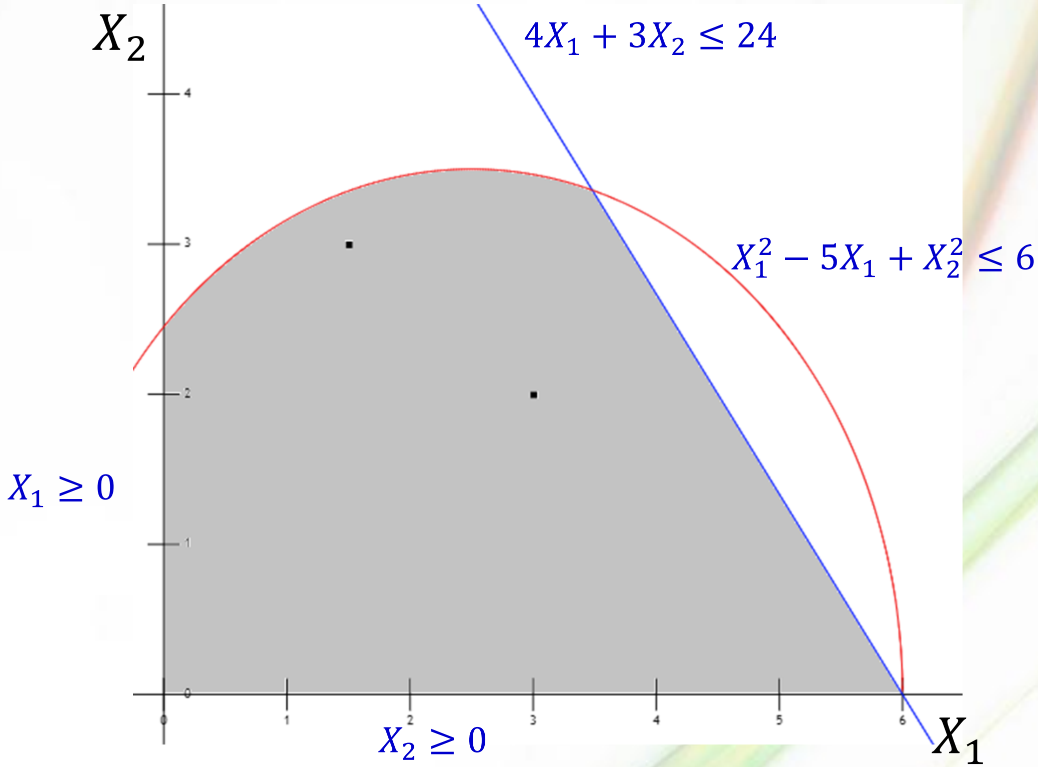
pri sledećim ograničenjima:

$$X_1^2 - 5X_1 + X_2^2 \leq 6$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 24$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$



nule funkcija su:

$$\boldsymbol{X_1^2 - 5X_1 + X_2^2 \leq 6}$$

Nule funkcije:

$$X_1 = 0;\ X_2 = \sqrt{6} = 2{,}45$$

$$X_2 = 0;\ X_1^2 - 5X_1 \leq 6,$$

$$X_{1_1} = -1 \quad X_{1_2} = 6$$

$$\boldsymbol{4X_1 + 3X_2 \leq 24}$$

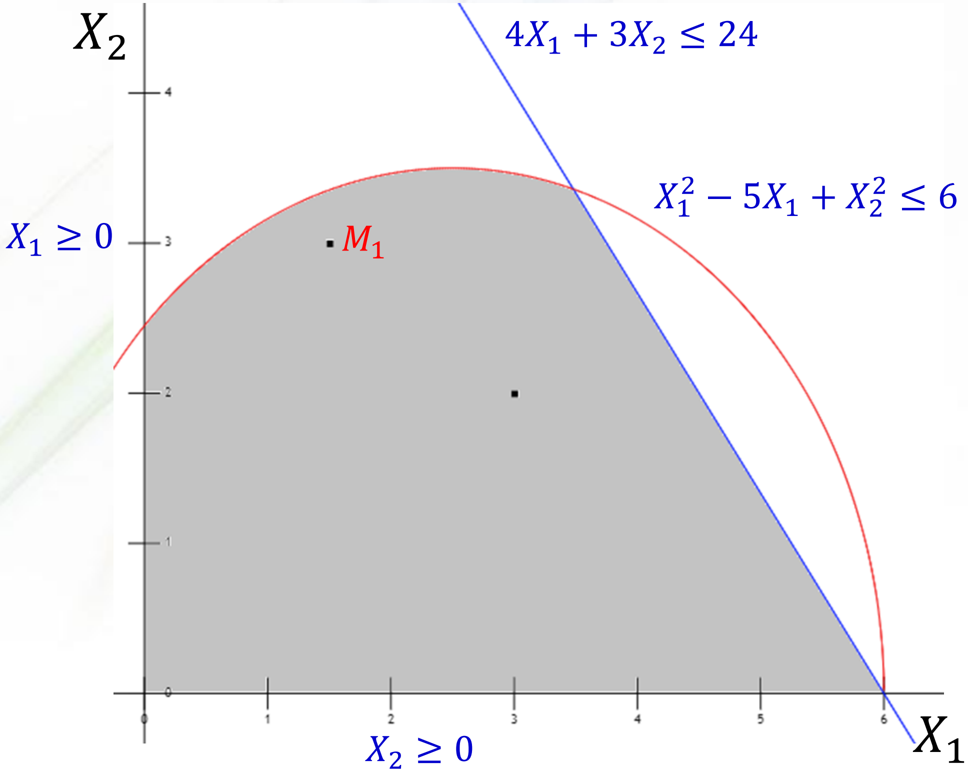
Nule funkcije:

$$X_1 = 0 \rightarrow X_2 = 8$$

$$X_2 = 0 \rightarrow X_1 = 6$$

Korak 1. Izbor početne tačke M_1

U dopuštenoj oblasti datoj na dijagramu, biramo proizvoljnu tacku M_1(1,5; 3)



M (X1=1,5; X2=3)

Tačka M_1 pripada dopuštenoj oblasti jer zadovoljava data ograničenja

$$(1{,}5)^2 - 5 \cdot 1{,}5 + 3^2 = 3{,}75 < 6$$

$$4 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 3 = 15 < 24$$

$$1{,}5 > 0$$

$$3 > 0$$

Korak 2. Izračunavanje vrednosti F_c u tački M_1

$$F_c = X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18$$

$$Fc(M1) = (1{,}5)^2 + 3^2 - 6 \cdot 1{,}5 - 4 \cdot 3 + 18 = 8{,}25$$

Korak 3. Određivanje gradijenta u tački M_1

$$grad\ F_c = \nabla F_c = \left(\frac{\partial(X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18)}{\partial X_1}; \frac{\partial(X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18)}{\partial X_2}\right)$$

$$grad\ F_c = (2X_1 - 6; 2X_2 - 4) = (-3; 2)$$

$$X_1 = 1{,}5 \qquad X_2 = 3$$

Ovde vidimo da u tački M_1 nije minimum jer je $\nabla F_c \neq 0$

Korak 4. Određivanje veličine koraka

$$\Delta\overrightarrow{X_1} = \lambda_1 \cdot grad\ F_{c_1}$$

$$M_2 = \overrightarrow{X_2} = \overrightarrow{X_1} - \lambda_1 \cdot grad\ F_{c_1}$$

$$M_2 = \overrightarrow{X_2} = [1{,}5 - \lambda_1(2X_1 - 6); 3 - \lambda_1(2X_2 - 4)]$$

$$M_2 = \overrightarrow{X_2} = [1{,}5 - \lambda_1(2 \cdot 1{,}5 - 6); 3 - \lambda_1(2 \cdot 3 - 4)]$$

$$M_2 = \Delta\overrightarrow{X_2} = (1{,}5 + 3\lambda_1; 3 - 2\lambda_1)$$

$$F_{c(X_2)} = F_c\left(X_1 - \lambda_1 \; grad \; F_{c_1}\right)$$

$$F_{c(X_2)} = (1{,}5 + 3\lambda_1)^2 + (3 - 2\lambda_1)^2 - 6(1{,}5 + 3\lambda_1) - 4(3 - 2\lambda_1) + 18$$

$$F_{c(X_2)} = 2{,}25 + 9\lambda_1 + 9\lambda_1^2 + 9 - 12\lambda_1 + 4\lambda_1^2 - 9 - 18\lambda_1 - 12 + 8\lambda_1 + 18$$

$$F_{c(X_2)} = 13\lambda_1^2 - 13\lambda_1 + 8,$$

Vrednost parametra λ_1 određuje se iz ekstremuma funkcije $F_{c(X_2)}$

$$\frac{\partial F_{c(X_2)}}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial(13\lambda_1^2 - 13\lambda_1 + 8{,}25)}{\partial \lambda_1} = 0$$

$$26\lambda_1 - 13 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{13}{26} = 0{,}5$$

Sada možemo odrediti koordinate tačke M_2:

$$M_2 = \overrightarrow{X_2} = (1{,}5 + 3 \cdot 0{,}5; 3 - 2 \cdot 0{,}5)$$

$$M_2 = \overrightarrow{X_2} = (3; 2)$$

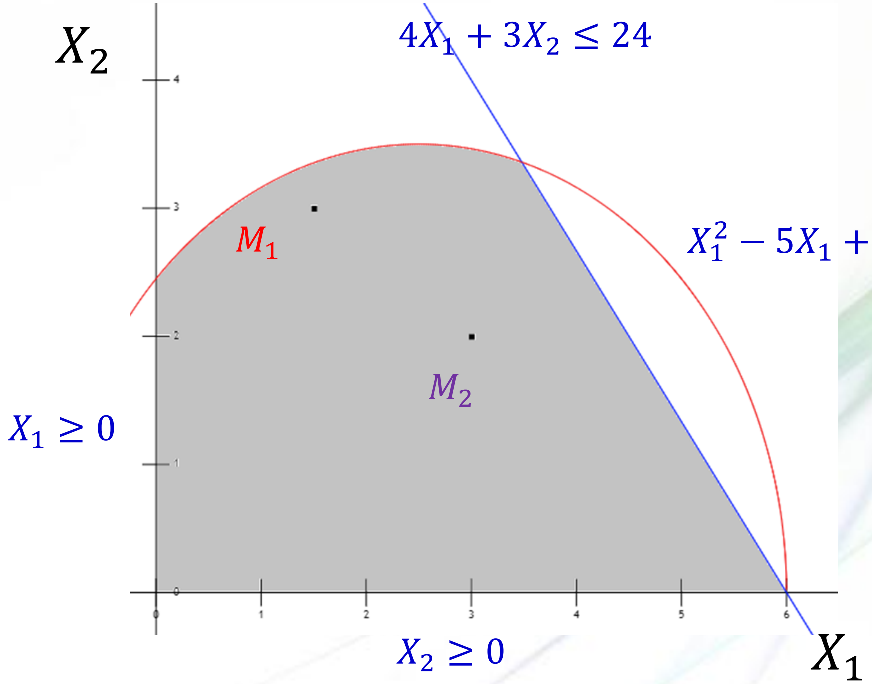
Korak 5. Provera ograničenja za tačku M_2

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 2^2 = -2 = -2 < 6$$

$$4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18 < 24$$

$$3 > 0$$

$$2 > 0$$



Tačka M_2 pada u oblast ograničenja

Korak 6. Izračunavanje vrednosti funkcije cilja F_c u tački M_2:

$$F_c = 3^2 + 2^2 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 18 = 5$$

$$F_{c_2} < F_{c_1} \;\; tj \;\; 5 < 8{,}25$$

Korak 7. Određivanje gradijenta u tački M_2:

$$grad\, F_{c_2} = \left(\frac{\partial (X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18)}{\partial X_1} ; \frac{\partial (X_1^2 + X_2^2 - 6X_1 - 4X_2 + 18)}{\partial X_2} \right)$$

$$grad\, F_{c_2} = (2X_1 - 6; 2X_2 - 4) = (2 \cdot 3 - 6; 2 \cdot 2 - 4) = (0; 0)$$

Dakle možemo no osnovu dobijenih rezultata zaključiti da je minimum F_c u tački M_2 jer je $\frac{\partial F_{c_2}}{\partial X_2} = 0$

Vrednost F_c u tački minimuma iznosi $\boldsymbol{F_c = 5}$ i to je najniža vrednost u dozvoljenoj radnoj oblasti.

Gradijentna metoda

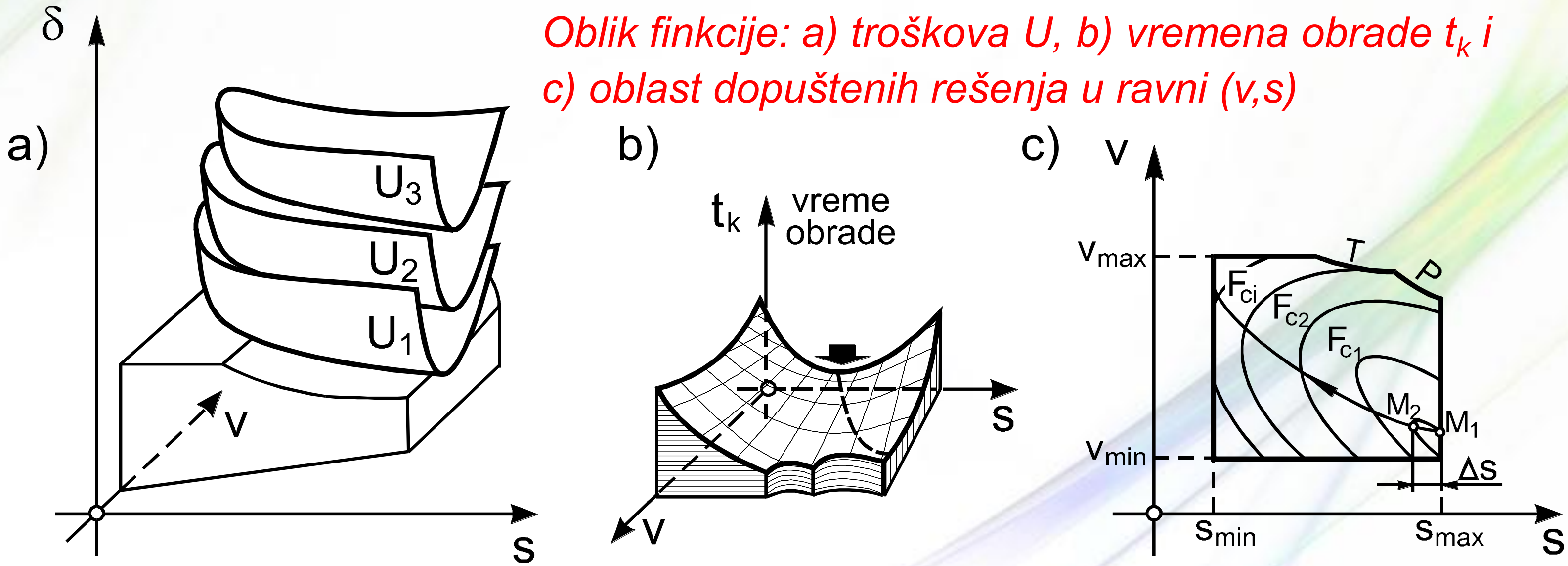
Pri unutrašnjoj optimizaciji obradnih procesa, odnosno određivanju optimalnih **režima obrade**, na bazi **troškova i vremena obrade** kao funkcija optimizacije, pogodno je primeniti gradijentni iterativni metod.

Ove funkcije optimizacije mogu se prikazati izrazom opšteg oblika:

$$F_c = F_c(v, s, \delta, c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_k)$$

Ulazne veličine obuhvataju grupu promenljivih i konstantnih veličina. Prvu grupu čine **brzina rezanja *v***, **pomak *s*** i **dubina rezanja *δ***, a drugu veličine $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_k$.

Oblik finkcije: a) troškova U, b) vremena obrade t_k i c) oblast dopuštenih rešenja u ravni (v,s)



Određivanje optimalnih režima obrade na bazi funkcije optimizacije, vrši se tako što se gradijentni metod primenjuje u svim ravnima *(v,s)* omeđenim parametrima i funkcijama ograničenja obradnog procesa, a broj ovih ravni, odnosno iteracija, određuje broj tehnoloških vrednosti dubina rezanja.

Prema tome, primena gradijentnog iterativnog metoda za rešavanje ovog optimizacionog zadatka zahteva sledeđu proceduru:

1. *Definisanje skupa tehnoloških vrednosti dubina rezanja:*

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_p\}$$

2. *Definiše se skup ograničenja za pomak, pri δ_i=const*

$$s_{\min} \leq s \leq s_{\max}$$

3. *Određivanje optimalne brzine rezanja v_{o1} u tački M1 na osnovu formule, slika 2c u kojoj je $s_1 = s_{max}$, pri posmatranoj dubini rezanja, δ_i=const, odnosno:*

$$\left(\frac{\partial Fc}{\partial v}\right)_{\substack{s=s_1 \\ \delta_i=const}} = 0$$

4. *Provera ograničenja za brzinu rezanja i složenih ograničenja pri δ_i=const, s=s1:*

$$v_{\min} \leq v_{o1} \leq v_{\max}$$

$$F_{gj} \leq 0$$

5. *Izračunavanje vrednosti funkcije u tački M1, gde su: $v=v_{o1}$, $s_1=s_{max}$, δ_i=const.*

$$F_c = F_c(v, s, \delta)$$

6. *Usvajanje prvog manjeg pomaka:*

$$s_2 = s_1 - \Delta s$$

7. *Procedura se nastavlja (od tačke 3-6) sve dok se ne zadovolji uslov dobijanja optimalne vrednosti funkcije cilja (min vreme, min troškovi, itd.)*

$$F_{c_{i-1}} < F_{c_i} < F_{c_{i+1}}$$

Iterativnim ponavljanjem izložene procedure za sve tehnološke vrednosti dubina rezanja odrediće se najmanja vrednost funkcije, a samim tim i optimalna tačka režima obrade posmatranog obradnog procesa, kao objekta optimizacije.

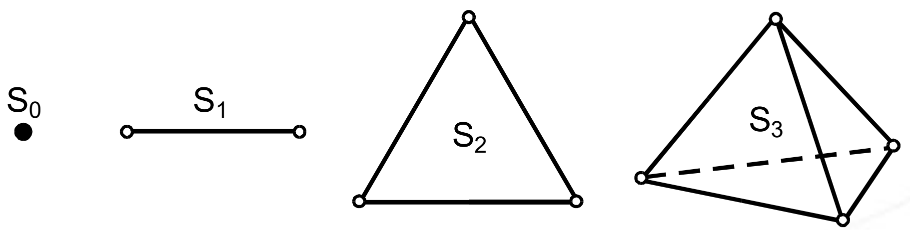
Simpleksna metoda

Slično gradijentnoj metodi, i simpleksna metoda se odlikuje:

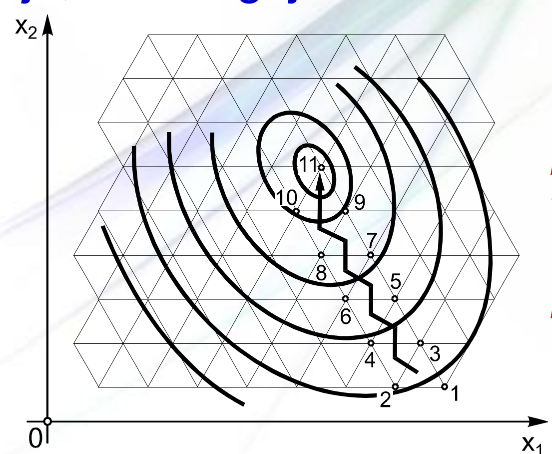
- *Univerzalnošću primene, bez obzira na oblik modela optimizacije,*
- *Jednostavnošću iterativne procedure,*
- *Mogućnošću rešavanja vrlo složenih optimizacionih zadataka,*
- *Orijentisanošću simpleksne procedure na računare, itd.*

Neki iterativni koraci u simpleksnoj proceduri nešto su lakši, jednostavniji u operativnom smislu (u odnosu na gradijentnu proceduru), jer je u simpleksnom metodu **isključena potreba za izračunavanjem parcijalnih izvoda** date funkcije optimizacije F_c, što je veoma značajno naročito kada je model optimizacije odnosno topologija funkcije optimizacije relativno složen.

Simpleksna metoda se, s obzirom na širinu primene, vrlo uspešno koristi u obe grupe optimizacionih metodologija, tj. i kao **metod eksperimentalne** (adaptivne) optimizacije i kao **analitički metod optimizacije**. Razlika je samo u tome što se vrednosti funkcije optimizacije F_c određuju u jednoj metodologiji merenjem, dakle, eksperimentalnim putem na objektu optimizacije, a u drugoj izračunavanjem iz matematičkog izraza funkcije optimizacije.



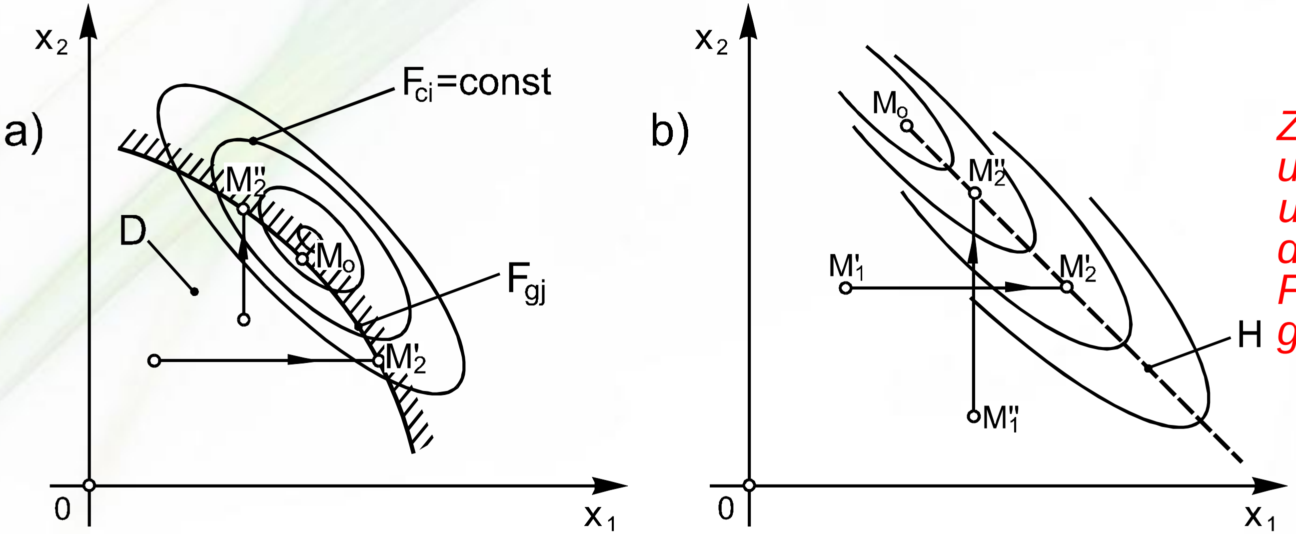
Oblici pravilnih simpleksa



Trajektorija pomeranja simpleks-planova ka optimumu dvofaktornog procesa

Gaus-Zajdelova metoda

U **Gaus-Zajdelovoj metodi** ili, kako se još naziva, **metoda uzastopnih promena** ulaznih veličina menja se, polazeći od neke polazne tačke M_p=M_1, sukcesivno, jedna za drugom, svaka nezavisno promenljiva veličina, sve dotle dok se u pravcu te promenljive veličine ne dostigne **ekstrem** date funkcije optimizacije, tj. do tačke M_2.



Zaustavljanje procedure uzastopnih promena ulaznih veličina (za slučaj dvodimenzionalne funkcije F_c) na granici F_{gj} (a) i grebenu H funkcije F_c (b)

Zatim se, počevši od tačke M_2, menja, na isti način, naredna promenljiva veličina, a posle nje i ostale, sve do tačke optimuma funkcije F_c. **Pri promeni jedne, ostale promenljive veličine zadržavaju stalnu vrednost**. Redosled uzastopnih promena nezavisnih veličina potpuno je proizvoljan.

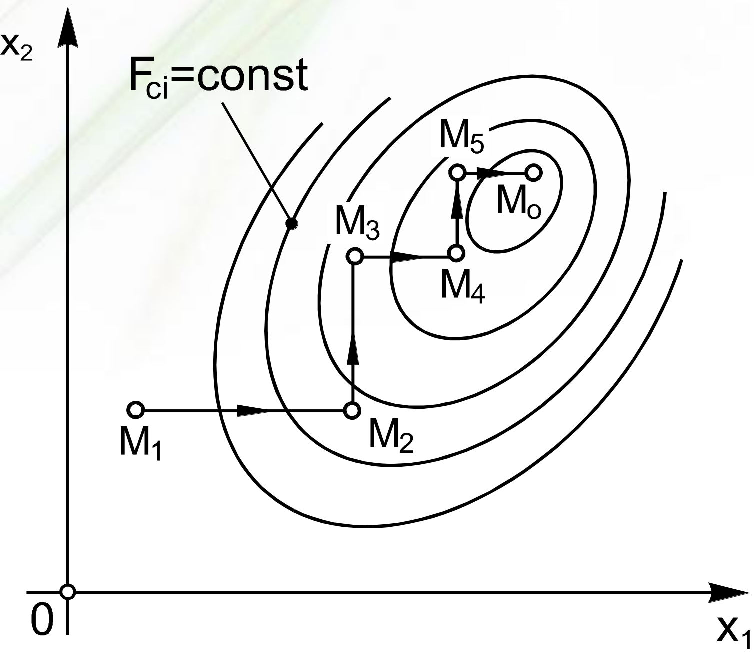
Tačka ekstrema funkcije optimizacije F_c pri promeni neke veličine x_i određuje se relativno lako pomoću poznatih postupaka iz matematičke analize.

Metoda se odlikuje krajnjom jednostavnošću iterativne procedure i odsustvom računanja parcijalnih izvoda. Mana metode je, međutim, u njenoj **relativno dugoj proceduri** i u značajnim teškoćama određivanja optimuma funkcije F_c pri nailasku na ograničenja F_{gj}, ili na oštri greben *H* funkcije F_c, a takođe i u otkrivanju nekog od **lokalnih ekstrema**, zavisno od položaja početne tačke, umesto globalnog ekstrema.

Metoda relaksacije

Za razliku od Gaus-Zajdelove metode, u **metodi relaksacije** procedura kretanja ka optimumu započinje iz neke početne tačke M_1, ne u pravcu proizvoljno uzete ose već u **pravcu one ose za koju je promena** (porast, opadanje) date funkcije optimizacije $\boldsymbol{F_c}$ **najveća**.

Taj osni pravac ili pravac kretanja određuje se tako što se u početnoj tački izračunavaju vrednosti **parcijalnih izvoda** funkcije F_c po svim nezavisno promenljivim veličinama.



Dalji tok procedure odvija se tako što se u narednim koracima (u tačkama $M_2, M_3, M_4, \ldots, M_o$) **ponavljaju operacije izvedene u prvom koraku** (tačka M_1). Procedura se smatra završenom (što znači da je određena tačka optimuma M_o) ako, pri kretanju iz tačke M_o po bilo kom osnom pravcu, **ne nastupa bitna promena vrednosti funkcije optimizacije** $\boldsymbol{F_c}$. Ovaj kriterijum se praktično izražava uslovom:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F_c}{\partial x_i} \right)^2 < \delta$$

Kada $\delta \to 0$ tada su parcijalni izvodi u tački nagomilavanja, odnosno tački optimuma, kojoj inače konvergira procedura ovog metoda, jednaki nuli što predstavlja poznati potrebni uslov za **ekstrem funkcije optimizacije** $\boldsymbol{F_c}$.

Relaksaciona metoda, kao i Gaus-Zajdelova, vrlo je jednostavna, **lako se programira i automatizuje njena procedura**. Pri tome je njena procedura nešto kraća. Ima iste mane kao i Gaus-Zajdelova metoda.

Metoda skeniranja

Ova metoda naziva se još i **metoda potpunog pretraživanja**, a karakteriše se pretraživanjem vrednosti funkcije optimizacije F_c u tačkama **dopuštene oblasti**, u kojoj ili na čijoj se granici nalazi optimum funkcije F_c.

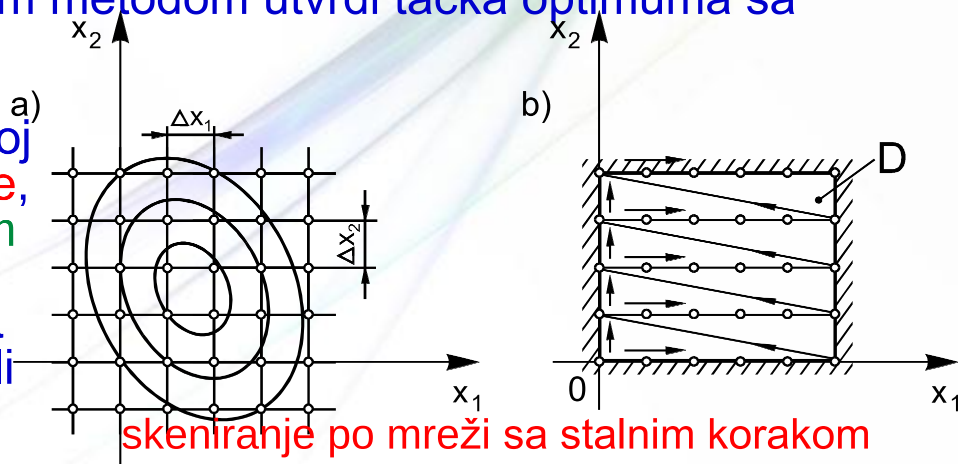
Što je **gustina tačaka**, u kojima se ispituje vrednost funkcije F_c u dopuštenoj oblasti D, **veća**, odnosno što je **korak skeniranja manji**, biće **viša tačnost pretraživanja**, veća sigurnost da se u skupu lokalnih, bezuslovnih ili uslovnih, otkrije globalni ekstrem i obratno.

Ali pri ovome treba imati u vidu to da **veliki broj tačaka**, odnosno obimni skup računskih operacija, koji raste sa smanjenjem koraka skeniranja i povećanjem broja ulaznih veličina, **umanjuje** se **praktični značaj metoda**, naročito kada je broj ulaznih varijabli relativno velik.

Zato se ova metoda praktično vrlo uspešno koristi za identifikovanje optimuma funkcije F_c, bez obzira na njen oblik i tipove funkcija ograničenja, samo u onim slučajevima kada je **relativno mala dimenzionalnost objekta** odnosno modela optimizacije, tj. kada broj ulaznih veličina nije veći od dve-tri.

Metoda se može **kombinovati sa nekom drugom metodom** i to tako što se pomoću nje približno identifikuje uža oblast globalnog ekstrema, odnosno optimuma, a zatim se drugom, na primer, gradijentnom metodom utvrdi tačka optimuma sa željenom tačnošću.

Metode skeniranja se **dele prema vrsti plana** pretraživanja optimuma u dopuštenoj oblasti. Kako plan može biti u obliku mreže, spirale, sa stalnim ili promenljivim korakom Δx_i itd., to se ove metode dele na **metode skeniranja po mreži**, **metode skeniranja po spirali**, metode skeniranja sa stalnim ili promenljivim korakom, itd.



skeniranje po mreži sa stalnim korakom

Metoda skeniranja

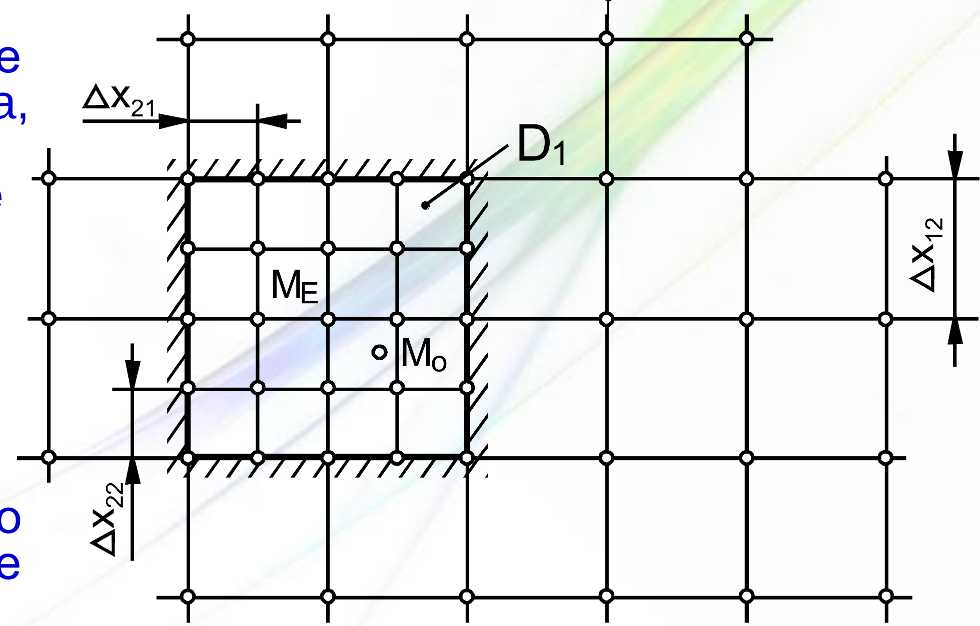
Metoda skeniranja po spirali je pogodna samo za slučaj dvodimenzionalnih funkcija optimizacije $F_c=F_c(x_1,x_2)$.

Metodologija skeniranja sa promenljivim korakom odvija se najčešće tako što se, u prvoj fazi, identifikuje **uža oblast *D***, oko optimuma primenom procedure sa **konstantnim** i **relativno velikim korakom Δx_{1i}**.

Zatim se, u drugoj fazi, pretražuje i određuje optimum sa potrebnom tačnošću korišćenjem **manjeg koraka** $\Delta x_{2i}<\Delta x_{1i}$, dakle, gušćeg rasporeda tačaka u lokalizovanoj oblasti D_1, oko optimuma M_o.

U tački M_E funkcija F_c imala je ekstremnu vrednost, najveću ili najmanju u odnosu na ostale tačke, utvrđenu u prvoj fazi.

Pored jednostavnosti procedure i određene sigurnosti identifikacije globalnog ekstrema, metoda skeniranja poseduje još jedno praktično značajno svojstvo: **isključena je potreba za izračunavanjem parcijalnih izvoda**. Uz to **sistem ograničenja ne otežava proceduru**, jer se plan tačaka pretraživanja smešta u dopuštenu oblast, pogotovo ako su funkcije ograničenja date u obliku nejednačina. Ako je, međutim, neka iz sistema funkcija ograničenja, ili ceo sistem ograničenja, data u obliku jednačine



metoda skeniranja sa promenljivim korakom

Dinamičko programiranje

Zadaci i objekti optimizacije, koji se rešavaju metodama linearnog i nelinearnog programiranja, a koji su izloženi u prethodnim tačkama, smatraju se jednoetapnim ili statičkim zadacima, jer **ne zavise od vremena**, pa se procedura određivanja optimuma, odnosno upravljanja objektom, na primer, nekim procesom, proteže na **jednu etapu**.

Ako, međutim, objekat optimizacije, na primer neki proces, **zavisi od vremena**, tj. ako se njegova optimizacija ili njegovo optimalno upravljanje izvodi **u više sukcesivnih etapa**, u više vremenskih perioda, čime se postiže optimizacija ili optimalno upravljanje procesa u celini, tada je reč o višeetapnim zadacima, odnosno procesima, koji se rešavaju **metodama dinamičkog programiranja**.

Ali metodologija dinamičkog programiranja sadrži **jednu manu**: za razliku od mnogih prethodnih metoda, u kojima su definisani i razvijeni relativno strogi i univerzalni algoritmi rešavanja optimizacionih zadataka, u metodama dinamičkog programiranja **nedostaje ova univerzalnost algoritma**, pa se pojedine grupe optimizacionih zadataka rešavaju na osnovu **posebnih**, za te grupe **razvijenih algoritama**. Inače, složeni problemi višefaktornosti rešavaju se primenom računara.

U tehnici i proizvodnoj tehnologiji postoje brojni objekti optimizacije koji se rešavaju metodama dinamičkog programiranja. Među ove objekte, odnosno optimizacione zadatke, spadaju sledeći osnovni zadaci:

- *Optimizacija proizvodnih tehnologija, odnosno optimizacija procesa obrade delova na obradnim sistemima sa stanovišta minimalnog vremena obrade i niz drugih,*
- *Optimalno planiranje proizvodnih programa,*
- *Optimalno projektovanje i optimizacija konstrukcija, mehanizama, jedinica i sistema proizvodne tehnike,*
- *Optimalna zamena i modernizacija obradnih i tehnoloških sistema, sistema upravljanja i dr.,*
- *Analiza pouzdanosti elemenata i sistema proizvodne tehnike,*
- *Optimalna raspodela resursa,*
- *Optimalno korišćenje obradnih i tehnoloških sistema i dr.*

Dinamičko programiranje

Primer iz ove grupe zadataka: neka je za obradu jedne serije delova potrebno, u i-tom mesecu, m_i obradnih sistema. Ako se u sledećem (i+1)-*om* mesecu menja obim rada, za što je potrebno m_{i+1} obradnih sistema za obradu date serije delova, potrebno je da se, pri zadatom obimu serije, odredi **optimalni broj obradnih sistema**, koji će se koristiti u svakom mesecu, kako bi se postigli **minimalni troškovi obrade** date serije:

- ***Rešavanje transportnih problema****, kao što su proizvodne linije i uopšte u transportu, na primer, određivanje najkraćeg puta na mreži i dr.,*
- ***Optimalno upravljanje zalihama****,*
- ***Rešavanje zadataka mrežnog planiranja*** *i niz drugih.*

Metodologija dinamičkog programiranja odlikuje se **raščlanjivanjem ili dekompozicijom nekog složenog optimizacionog zadatka**, tj. zadatka koji sadrži, uz ostalo, **veći broj promenljivih**, a koji se inače rešava ovim metodom, na **niz uzastopnih etapa**, pri čemu sada, u pojedinim etapama, figuruše **relativno manji broj varijabli**. Time se olakšava rešavanje datog optimizacionog zadatka. To je prvi, opšti korak algoritma ove metodologije.

Drugi korak se odnosi na primenu **Belmanovog principa optimalnosti** na optimizaciju ovakvih višeetapnih procesa. Prema ovom principu optimalno rešenje se karakteriše time da, bez obzira na to kakvo je neko dato rešenje, naredno rešenje mora biti optimalno u odnosu na to dato rešenje. To važi za sve etape procesa, a to znači da sva naredna rešenja moraju biti optimalna u odnosu na početno, bez obzira na to kakvo je to početno rešenje.

Dinamičko programiranje

Metod dinamičkog programiranja se koristi pri rešavanju optimizacionih zadataka šije su funkcije optimizacije **separabilnog oblika**.

Za **separabilnu funkciju optimizacije** i funkcije ograničenja karakteristično je da se izražavaju oblicima:

$$F_c = F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3) + \ldots + F_n(x_n)$$

$$F_{gi} = F_{gi1}(x_1) + F_{gi2}(x_2) + F_{gi3}(x_3) + \ldots + F_{gin}(x_n) \leq 0$$

To dopušta da se procedure optimizacije mnogih objekata tretiraju kao višeetapni procesi, pa, imajući u vidu ovo, mnogi se optimizacioni modeli sa separabilnim funkcijama optimizacije mogu **svesti na modele sa jednim ograničenjem**:

$$F_c = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + \ldots + g_n(x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_j(x_j)$$

Gde su $g_j(x_j) = c_j x_j$ - **funkcije pojedinih dobiti** koje mogu imati linearni ili nelinearni oblik.

Sistemom funkcija koje su definisane metodom dinamičkog programiranja definiše se **algoritam određivanja optimalnog rešenja** u datom optimizacionom zadatku.

Metodom dinamičkog programiranja se vrlo uspešno rešavaju zadaci optimizacije **diskretnih, višeetapnih procesa** čiji su kriterijumi optimalnosti izraženi u obliku aditivnih, odnodno separabilnih funkcija, sastavljenih od parcijalnih funkcija optimizacije pojedinih etapa.